Language: **Greek**

Day: **2**

Πρόβλημα 4: Δύο κύκλοι ω_1 $και$ ω_2 , που έχουν ίσες ακτίνες, τέμνονται στα σημεία X_1 $και$ X_2 . Θεωρείστε ένα άλλο κύκλο ω που εφάπτεται εξωτερικά του ω_1 στο σημείο T_1 και εσωτερικά του ω_2 στο σημείο T_2 . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες X_1T_1 $και$ X_2T_2 συναντώνται σε ένα σημείο που βρίσκεται στον κύκλο ω .

Πρόβλημα 5: Ας είναι k $και$ n ακέραιοι έτσι ώστε $k \geq 2$ και $k \leq n \leq 2k-1$. Τοποθετείστε ορθογώνια πλακάκια, το καθένα με διαστάσεις $1 \times k$ ή $k \times 1$ πάνω σε μια $n \times n$ σκακιέρα, έτσι ώστε το κάθε πλακάκι να καλύπτει ακριβώς k τετραγωνάκια της σκακιέρας και να μην υπάρχει ταυτόχρονη επικάλυψη χώρου από δύο πλακάκια. Προχωρήστε σε αυτή τη διαδικασία μέχρι που να μην είναι δυνατό να τοποθετηθεί άλλο πλακάκι με αυτό τον τρόπο. Για το καθένα από αυτούς τους αριθμούς k $και$ n να προσδιορίσετε τον ελάχιστο αριθμό από πλακάκια που μια τέτοια τοποθέτηση μπορεί να περιέχει .

Πρόβλημα 6: Ας είναι S το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων n για τους οποίους το n^4 έχει διαιρέτη στις τιμές που δίνονται από $n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+2n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος στοιχεία του S που το καθένα έχει τη μορφή $7m$ ή $7m+1$ ή $7m+2$ ή $7m+5$ ή $7m+6$ και ότι δεν υπάρχουν καθόλου στοιχεία του S που το καθένα να είναι της μορφής $7m+3$ ή $7m+4$, όπου m είναι ακέραιος.