Language: **Spanish**

Day: **2**

Miércoles, 13 de abril de 2016

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5. Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k-1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ ó $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y que no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para cada n y k que cumplen las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

Problema 6. Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\{n^2+1, n^2+2, ..., n^2+2n\}$. Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m+3$ y $7m+4$, siendo m un entero.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos