2016 m. balandžio 13 d., trečiadienis

4 uždavinys. Du apskritimai ω_1 ir ω_2, kurių spinduliai lygūs, kertasi skirtinguose taškuose X_1 ir X_2. Nagrinėkime apskritimą ω, liečiantį ω_1 iš išorės taške T_1, o apskritimą ω_2 iš vidaus taške T_2. Įrodykite, kad tiesių X_1T_1 ir X_2T_2 sankirta priklauso apskritimui ω.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai k ir n tenkina nelygybes $k \geq 2$ and $k \leq n \leq 2k-1$. Kvadratinė lenta, sudaryta iš $n \times n$ vienetinių langelių, dengiama stačiakampėmis $k \times 1$ ir $1 \times k$ matmenų plytelėmis. Plytelė turi uždengti lygiai k gretimų langelių ir negali persidengti su kita plytele. Sudėjus plyteles, dar vienai plytelei vietos neliko. Kiekvienai tokiai skaičių k ir n porai nustatykite, kiek mažiausiai plytelių gali būti gautajame denginyje.

6 uždavinys. Aibė S sudaryta iš visų natūraliųjų skaičių n, kuriems n^4 turi daliklį, lygų vienam iš skaičių n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Įrodykite, kad aibėje S yra po be galo daug elementų, užrašomų kiekvienu iš pavidalų $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$, o pavidalu $7m+3$ arba $7m+4$ negali būti užrašytas nė vienas aibės S elementas (m žymi sveikąjį skaičių).

Darbo laikas: 4 val. 30 min.
Kiekvieno uždavinio vertė yra 7 taškai