2016. április 13., szerda

4. Feladat ω_1 és ω_2 két egyenlő sugarú kör, melyek két metszéspontja X_1 és X_2. Legyen ω olyan kör, amely kívülről érinti ω_1-et a T_1 pontban, és belülről érinti ω_2-t a T_2 pontban. Igazoljuk, hogy az X_1T_1 és X_2T_2 egyenesek metszéspontja az ω körre esik.

5. Feladat Legyenek k és n egész számok, melyekre $k \geq 2$ és $k \leq n \leq 2k-1$ teljesül. Az $n \times n$-es sakktáblára $1 \times k$ illetve $k \times 1$ méretű dominókat helyezhetünk egymás után, amelyek pontosan k mezőt foglalnak el, és nincsen köztük átfedés. Addig teszünk le így dominókat amíg már többet nem helyezhetünk le. Határozzuk meg k és n függvényében, hogy legalább mennyi dominó kerül így a sakktáblára.

6. Feladat Legyen S azon n pozitív egész számok halmaza, amelyekre teljesül, hogy n^4-nek van osztója az n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n számok közül. Igazoljuk, hogy végtelen sok $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$ és $7m+6$ alakú eleme van S-nek, valamint hogy nincsen $7m+3$ vagy $7m+4$ alakú eleme, ahol m egész szám.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra
Minden feladat 7 pontot ér