Language: **Ukrainian**

Day: **2**

П'ятниця, 13 квітня 2012

Задача 5. Прості числа p та q задовольняють умову

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

для деякого натурального числа n. Знайдіть усі можливі значення $q-p$.

Задача 6. Нескінченно багато людей зареєстровані в соціальній мережі *Mugbook*. Деякі пари (різних) користувачів зареєстровані як *друзі*, але кожна особа має лише скінчену кількість друзів. Кожен користувач має принаймні одного друга. *(Дружба симетрична, тобто якщо A є другом B, то B є другом A.)*

Кожна особа має назвати одного зі своїх друзів ***найкращим другом***. Якщо A називає B своїм найкращим другом, то (на жаль) це не означає, що B обов'язково назве A своїм найкращим другом. Людина, котру назвали найкращим другом, називається 1-***найкращий друг***. Загалом, для натурального $n>1$ користувач є n-***найкращим другом***, якщо він був названий найкращим другом особи, яка є $(n-1)$-***найкращим другом***. Особа, котра є k-***найкращим другом*** для будь-якого натурального k, називається *популярною*.

(a) Доведіть, що кожна популярна особа є найкращим другом іншої популярної особи.

(b) Доведіть, що у випадку, коли кожен може мати нескінченну кількість друзів, може бути, що популярна особа не є найкращим другом популярної особи.

Задача 7. Нехай ABC — гострокутний трикутник з описаним навколо нього колом Γ та ортоцентром H. Нехай K — точка кола Γ по іншу сторону від A відносно BC. Нехай L симетрична точці K відносно прямої AB, а M симетрична точці K відносно прямої BC. Нехай E є другою точкою перетину Γ з описаним колом трикутника BLM. Доведіть, що прямі KH, EM та BC перетинаються в одній точці. *(Ортоцентром трикутника є точка перетину його висот.)*

Задача 8. *Словом* називається скінчена послідовність літер з деякого алфавіту. Слово називається *повторним*, якщо воно є зчепленням принаймні двох однакових підслів (наприклад, *ababab* та *abcabc* повторні, а *ababa* та *aabb* — ні). Доведіть, що якщо слово має властивість, що перестановка будь-яких двох сусідніх літер робить слово повторним, то всі його літери однакові. (Зауважимо, що перестановка двох сусідніх однакових літер лишає слово незмінним.)